Matemática III – 2017

Alejandro Díaz-Caro & Emanuel Delgadillo

Version 2017.10.09

1. Sobre la materia

1.1. Contenidos y cronograma tentativo

Fechas	Temas
15 y 22 de Agosto	Límite doble y continuidad
29 de Agosto y 5 de Septiembre	Derivada parcial y direccional
12 y 19 de Septiembre	Integrales dobles
26 de Septiembre	*Consulta*
3 de Octubre	**Primer parcial**
10 y 17 de Octubre	Números complejos
24 y 31 de Octubre	Polinomios
7 y 14 de Noviembre	Polinomio de Taylor
21 de Noviembre	*Consulta*
28 de Noviembre	**Segundo parcial**
5 de Diciembre	**Recuperatorio**
12 de Diciembre	**Integrador**

1.2. Bibliografía

Temas	Libro	Secciones / Páginas
• Límite doble • Continuidad • Derivada parcial • Derivada direccional • Integrales dobles	R. Larson, R. Hostetler, B. Edward, CÁLCULO II, Pirámide, 2010	Secciones 13.2, 13.3, 13.6 y 14.2
• Números complejos • Polinomios	J. Stweart, L. Redlin, S. Watson, PRECÁLCULO, 6ta ed. , Cengage Learning Editores, 2012	Secciones 3.1 a 3.5
• Polinomio de Taylor	T. Apostol, CALCULUS, Wiley India Pvt., 2007	Páginas 335 a 340

1.3. Condiciones de aprobación

- 75 % o más de tareas entregadas.
- Ambos parciales con nota superior o igual a 6.
- Promedio entre parciales superior o igual a 7.

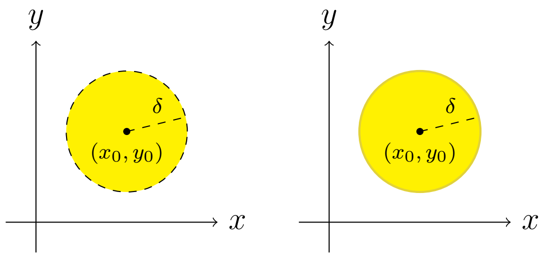
Índice

2. Límite doble y continuidad

2.1. Entornos en el plano

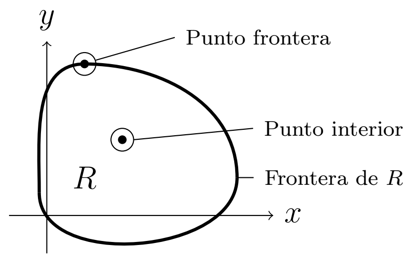
Definición 2.1 (Entorno)**.** Un entorno en un plano es el análogo bidimensional a un intervalo en la recta real. Utilizando la fórmula para distancia entre dos puntos (x, y) y (x_0, y_0) en el plano, definimos el entorno δ de (x_0, y_0) como el disco con radio $\delta > 0$ centrado en (x_0, y_0).

$$\text{Disco abierto: } \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$
$$\text{Disco cerrado: } \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta\}$$



Disco abierto Disco cerrado

Definición 2.2. Un punto (x_0, y_0) en una región R del plano es un *punto interior* de R si existe un entorno δ de (x_0, y_0) que esté contenido completamente en R.
Si todo punto de R es un punto interior, entonces R es una *región abierta*.
Un punto (x_0, y_0) es un *punto frontera* de R si todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos dentro de R y puntos fuera de R.
Si una región contiene todos sus puntos frontera, la región es *cerrada*. Una región que contiene algunos pero no todos sus puntos frontera, no es ni abierta ni cerrada.



Frontera y puntos interiores de una región R

2.2. Límite de una función de dos variables

Definición 2.3 (Límite)**.** Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), excepto posiblemente en (x_0, y_0), y sea L un número real. Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Observaciones.

- Gráficamente, la definición de límite implica que para todo punto $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en el disco de radio δ, el valor $f(x, y)$ está entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$.
- La definición del límite de una función en dos variables es similar a la definición del límite de una función en una variable, pero existe una diferencia importante. Para determinar si una función en una sola variable tiene límite, sólo se necesita ver que se aproxime al límite por derecha y por izquierda, y el límite existe cuando se aproxima al mismo límite por ambos lados. En cambio, en la función de dos variables, la expresión
$$(x, y) \to (x_0, y_0)$$
significa que el punto (x, y) puede aproximarse al punto (x_0, y_0) por cualquier dirección. Si el valor de
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$
no es el mismo al aproximarse por cualquier dirección, o trayectoria, o camino, a (x_0, y_0), el límite no existe.

Ejemplo (Verificar un límite a partir de la definición). Queremos verificar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$

Sea $f(x, y) = x$ y $L = a$. Se necesita mostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe un entorno δ de (a, b) tal que
$$|f(x, y) - L| = |x - a| < \varepsilon$$
siempre que $(x, y) \neq (a, b)$ se encuentre en el entorno.
Primero se puede observar que $0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$ implica que

$$|f(x, y) - a| = |x - a| = \sqrt{(x - a)^2} \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

Así que podemos elegir $\delta = \varepsilon$ y el límite queda verificado.

Observación. Los límites de las funciones de varias variables tienen las mismas propiedades respecto a la suma, diferencia, producto y cociente que los límites de funciones de una sola variable.

Ejemplo (Cálculo de un límite). Queremos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$$

Usando las propiedades de los límites de productos y de sumas se obtiene

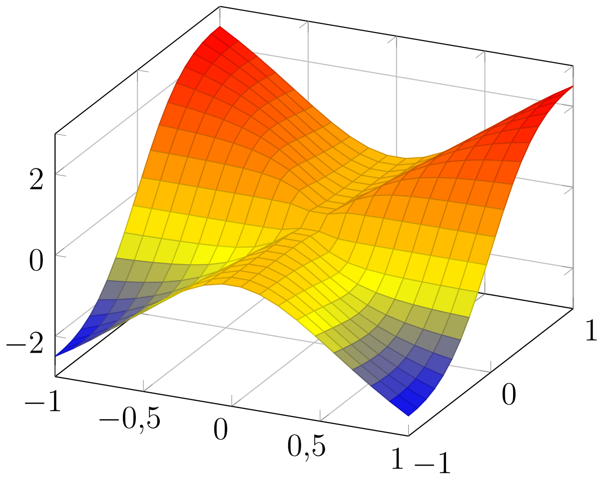
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} 5x^2y = 5(1^2)(2) = 10 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + y^2) = (1^2 + 2^2) = 5$$

Como el límite de un cociente es igual al cociente de los límites (y el denominador no es 0), tenemos
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{10}{5} = 2$$

Ejemplo (Verificar un límite). Queremos verificar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

En este caso, los límites del numerador y del denominador son ambos 0, por lo tanto no se puede determinar la existencia (o inexistencia) del límite tomando los límites del numerador y del denominador por separado y dividiendo después. Sin embargo, por la gráfica de f, parece razonable pensar que el límite pueda existir.



Procedemos utilizando la definición de límite.
Notar que

$$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

Entonces, en un entorno δ de $(0,0)$, se tiene $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, lo que, para $(x,y) \neq (0,0)$ implica

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} \right| = 5|y| \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} \right)}_{\leq 1} \leq 5|y| \leq 5\sqrt{x^2+y^2} \leq 5\delta$$

Por lo tanto, eligiendo $\delta = \varepsilon/5$ concluimos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Observación. Con algunas funciones es fácil reconocer que el límite no existe. Por ejemplo, está claro que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$$

no existe, porque el valor de $f(x,y)$ crece sin tope cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de *cualquier trayectoria.*
Con otras funciones no es tan fácil reconocer que un límite no existe.

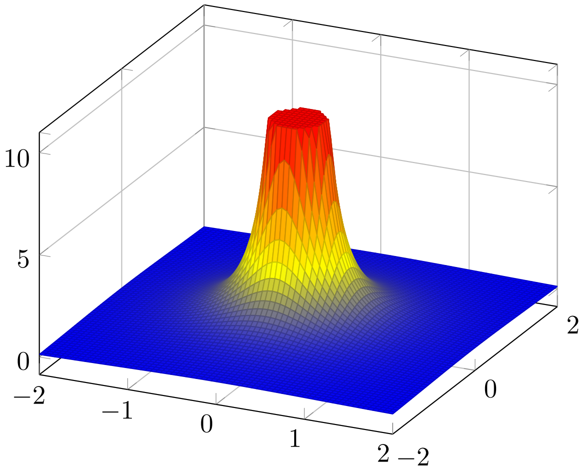


Figura 1: Gráfica de la función $\frac{1}{x^2+y^2}$

Ejemplo (Un límite que no existe). Queremos mostrar que el siguiente límite no existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$$

El dominio de la función

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$$

consta de todos los puntos del plano xy con excepción del punto $(0,0)$. Para mostrar que el límite no existe cuando (x,y) se aproxima a $(0,0)$, considérese aproximaciones a $(0,0)$ a lo largo de dos trayectorias diferentes:
A lo largo del eje x, todo punto es de la forma $(x,0)$ y el límite a lo largo de esta trayectoria es

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}\right)^2 = \lim_{(x,0)\to(0,0)} 1^2 = 1$$

Sin embargo, si (x,y) se aproxima a $(0,0)$ a lo largo de la recta $y=x$, se obtiene

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-x^2}{x^2+x^2}\right)^2 = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \left(\frac{0}{2x^2}\right)^2 = 0$$

Esto significa que en cualquier disco abierto centrado en $(0,0)$ existen puntos (x,y) en los que f toma el valor 1 y otros puntos en los que f asume el valor 0. Por ejemplo, $f(x,y) = 1$ en los puntos $(1,0)$, $(0{,}1,0)$, $(0{,}01,0)$ y $(0{,}001,0)$, y $f(x,y) = 0$ en los puntos $(1,1)$, $(0{,}1,0{,}1)$, $(0{,}001,0{,}01)$ y $(0{,}001,0{,}001)$. Por lo tanto f no tiene límite cuando $(x,y)\to(0,0)$.

2.3. Continuidad de una función de dos variables

En el ejemplo "Cálculo de un límite" de la sección anterior, se podría haber calculado el límite de $f(x,y) = 5x^2y/(x^2+y^2)$ cuando $(x,y)\to(1,2)$ directamente evaluando la función en ese punto: $f(1,2) = 2$. En tales casos se dice que la función es *continua* en el punto $(1,2)$.

Definición 2.4 (Continuidad de una función de dos variables)**.** Una función f de dos variables es *continua en un punto* (x_0, y_0) de una región abierta R si $f(x_0, y_0)$ es igual al límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Es decir

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

La función f es *continua en la región abierta* R si es continua en todo punto de R.

En el ejemplo "Verificar un límite" de la sección anterior se mostró que la función $f(x, y) = 5x^2y/(x^2 + y^2)$ tiene límite definido en $(0, 0)$, sin embargo no es continua en $(0, 0)$ ya que $f(0, 0)$ no está definida. En ese caso se podría eliminar fácilmente la discontinuidad definiendo el valor de f en $(0, 0)$ igual a su límite. A tales discontinuidades se llaman *removibles o evitables.* En cambio, en el ejemplo "Un límite que no existe", se mostró una función que no está definida en $(0, 0)$, y tampoco tiene límite en dicho punto, por lo que es una discontinuidad *no removible o inevitable.*

Teorema 2.1 (Funciones continuas en dos variables)**.** Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0, y_0), entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0, y_0):

1. Múltiplo escalar: kf
2. Suma y diferencia: $f + g$
3. Producto: fg
4. Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0) \neq 0$

Teorema 2.2 (Continuidad de una función compuesta)**.** Si h es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $h(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ es continua en (x_0, y_0). Es decir,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0))$$

Observación. En el teorema anterior, notar que h es una función de dos variables mientras que g es una función de una variable.

Ejemplo (Análisis de la continuidad). Queremos analizar la continuidad de estas funciones:

1. $f(x, y) = \dfrac{x - 2y}{x^2 + y^2}$
2. $g(x, y) = \dfrac{2}{y - x^2}$

1. Como la función racional es continua en todo punto de su dominio, se puede concluir que f es continua en todo punto del plano xy excepto en $(0, 0)$.

2. La función $2/(y - x^2)$ es continua excepto en los puntos en los cuales el denominador es 0, $y - x^2 = 0$. Por tanto, se puede concluir que la función es continua en todos los puntos excepto en los puntos que se encuentran en la parábola $y = x^2$. En el interior de esta parábola se tiene $y > x^2$, y la superficie representada por la función se encuentra sobre el plano xy. En el exterior de la parábola, $y < x^2$, y la superficie se encuentra debajo del plano xy

3. Derivadas parciales y direccionales

3.1. Derivadas parciales

Sección 13.3 del libro

R. Larson, R. Hostetler, B. Edward, Cálculo II, Pirámide, 2010.

Para esta sección no se hace apunte, ya que sería una copia textual de dicho libro. Ver páginas 906 a 911.

Sección 13.3 Derivadas parciales

- **Hallar y utilizar las derivadas parciales de una función de dos variables.**
- **Hallar y utilizar las derivadas parciales de una función de tres o más variables.**
- **Hallar derivadas parciales de orden superior de una función de dos o tres variables.**

Mary Evans Picture Library

JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783)

La introducción de las derivadas parciales ocurrió años después del trabajo sobre el cálculo de Newton y Leibniz. Entre 1730 y 1760, Leonhard Euler y Jean Le Rond d'Alembert publicaron por separado varios artículos sobre dinámica en los cuales establecieron gran parte de la teoría de las derivadas parciales. Estos artículos utilizaban funciones de dos o más variables para estudiar problemas de equilibrio, movimiento de fluidos y cuerdas vibrantes.

Derivadas parciales de una función de dos variables

En aplicaciones de funciones de varias variables suele surgir la pregunta: ¿"Cómo afectaría al valor de una función un cambio en una de sus variables independientes"? Se puede contestar esta pregunta considerando cada una de las variables independientes por separado. Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico podría repetir el experimento varias veces usando cantidades distintas de catalizador, mientras mantiene constantes las otras variables como temperatura y presión. Para determinar la velocidad o el ritmo de cambio de una función f respecto a una de sus variables independientes se puede utilizar un procedimiento similar. A este proceso se le llama **derivación parcial** y el resultado se llama **derivada parcial** de f con respecto a la variable independiente elegida.

Definición de las derivadas parciales de una función de dos variables

Si $z = f(x, y)$, las **primeras derivadas parciales** de f con respecto a x y y son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

siempre y cuando el límite exista.

Esta definición indica que si $z = f(x, y)$, entonces para hallar f_x *se considera y constante* y se deriva con respecto a x. De manera similar, para calcular f_y, *se considera x constante* y se deriva con respecto a y.

EJEMPLO 1 Hallar las derivadas parciales

Hallar las derivadas parciales f_x y f_y de la función

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y. \qquad \text{Función original.}$$

Solución Si se considera y como constante y se deriva con respecto a x se obtiene

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f_x(x, y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y. \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

Si se considera x constante y se deriva con respecto a y obtenemos

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f_y(x, y) = -2x^2y + 2x^3. \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } y.$$

Notación para las primeras derivadas parciales

Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se denotan por

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Las primeras derivadas parciales evaluadas en el punto (a, b) se denotan por

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a, b)} = f_x(a, b) \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a, b)} = f_y(a, b).$$

EJEMPLO 2 Hallar y evaluar las derivadas parciales

Dada $f(x, y) = xe^{x^2y}$, hallar f_x y f_y, y evaluar cada una en el punto $(1, \ln 2)$.

Solución Como

$$f_x(x, y) = xe^{x^2y}(2xy) + e^{x^2y} \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

la derivada parcial de f con respecto a x en $(1, \ln 2)$ es

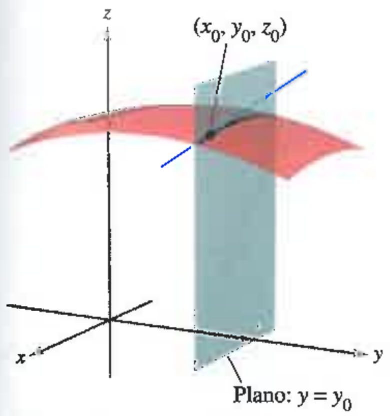
$$\begin{aligned} f_x(1, \ln 2) &= e^{\ln 2}(2 \ln 2) + e^{\ln 2} \\ &= 4 \ln 2 + 2. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= xe^{x^2y}(x^2) \\ &= x^3e^{x^2y} \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } y. \end{aligned}$$

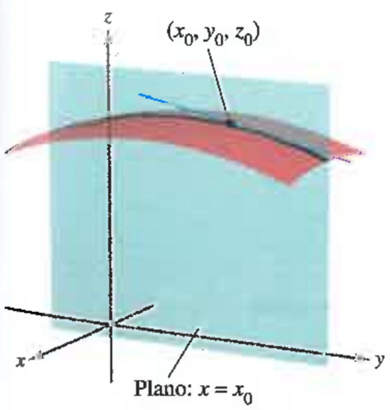
la derivada parcial de f con respecto a y en $(1, \ln 2)$ es

$$\begin{aligned} f_y(1, \ln 2) &= e^{\ln 2} \\ &= 2. \end{aligned}$$



$\frac{\partial f}{\partial x}$ = pendiente en la dirección x

Figura 13.29



$\frac{\partial f}{\partial y}$ = pendiente en la dirección y

Figura 13.30

Las derivadas parciales de una función de dos variables, $z = f(x, y)$, tienen una interpretación geométrica útil. Si $y = y_0$, entonces $z = f(x, y_0)$ representan la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$, como se muestra en la figura 13.29. Por consiguiente,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

representa la pendiente de esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Nótese que tanto la curva como la recta tangente se encuentran en el plano $y = y_0$. Análogamente,

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

representa la pendiente de la curva dada por la intersección de $z = f(x, y)$ y el plano $x = x_0$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, como se muestra en la figura 13.30.

Informalmente, los valores $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en (x_0, y_0, z_0) denotan las **pendientes de la superficie en las direcciones de x y y**, respectivamente.

EJEMPLO 3 Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de x y de y

Hallar las pendientes en las direcciones de x y de y de la superficie dada por

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

en el punto $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$.

Solución Las derivadas parciales de f con respecto a x y a y son

$$f_x(x, y) = -x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y. \qquad \text{Derivadas parciales.}$$

Por tanto, en la dirección de x, la pendiente es

$$f_x\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{Figura 13.31}a.$$

y en la dirección de y, la pendiente es

$$f_y\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -2. \qquad \text{Figura 13.31}b.$$

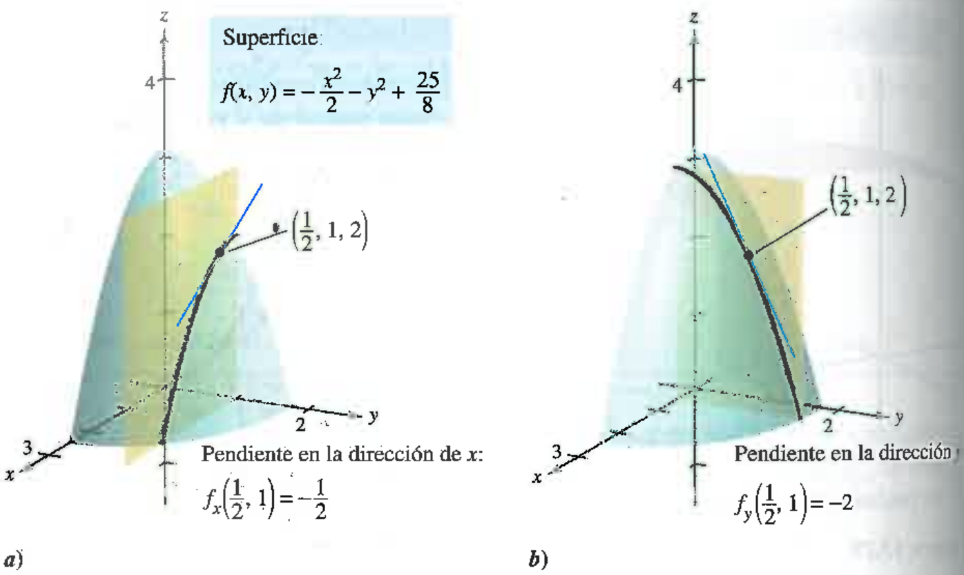


Figura 13.31

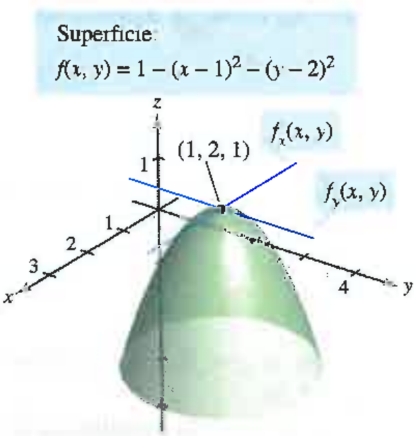


Figura 13.32

EJEMPLO 4 Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de x y de y

Hallar las pendientes de la superficie dada por

$$f(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$$

en el punto (1, 2, 1), en las direcciones de x y de y.

Solución Las derivadas parciales de f con respecto a x y y son

$$f_x(x, y) = -2(x - 1) \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2(y - 2). \qquad \text{Derivadas parciales.}$$

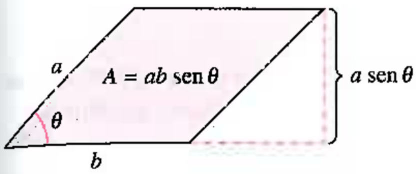
Por tanto, en el punto (1, 2, 1), las pendientes en las direcciones de x y de y son

$$f_x(1, 2) = -2(1 - 1) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(1, 2) = -2(2 - 2) = 0$$

como se muestra en la figura 13.32.

Sin importar cuántas variables haya, las derivadas parciales se pueden interpretar como *tasas*, *velocidades* o *ritmos de cambio*.

EJEMPLO 5 Derivadas parciales como velocidades o ritmos de cambio



El área del paralelogramo es ab sen θ
Figura 13.33

El **área** de un paralelogramo con lados adyacentes a y b entre los que se forma un ángulo θ está dada por $A = ab \operatorname{sen} \theta$, como se muestra en la figura 13.33.

a) Hallar la tasa o el ritmo de cambio de A respecto de a si $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

b) Calcular la tasa o el ritmo de cambio de A respecto de θ si $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Solución

a) Para hallar la tasa o el ritmo de cambio del área respecto de a, se mantienen b y θ constantes y se deriva respecto de a para obtener

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b \operatorname{sen}\theta \qquad \text{Derivada parcial respecto a } a.$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 20 \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 10. \qquad \text{Sustituir a } b \text{ y } \theta.$$

b) Para hallar la tasa o el ritmo de cambio del área respecto de θ, se mantiene a y b constantes y se deriva respecto de θ para obtener

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = ab \cos \theta \qquad \text{Derivada parcial respecto de } \theta.$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 200 \cos \frac{\pi}{6} = 100\sqrt{3}. \qquad \text{Sustituir } a, b \text{ y } \theta.$$

Derivadas parciales de una función de tres o más variables

El concepto de derivada parcial puede extenderse de manera natural a funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$, existen tres derivadas parciales cada una de las cuales se forma manteniendo constantes las otras dos variables. Es decir, para definir la derivada parcial de w con respecto a x, se consideran y y z constantes y se deriva con respecto a x. Para hallar las derivadas parciales de w con respecto a y y con respecto a z se emplea un proceso similar.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general, si $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, hay n derivadas parciales denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Para hallar la derivada parcial con respecto a una de las variables, se mantienen constantes las otras variables y se deriva con respecto a la variable dada.

2.M.

EJEMPLO 6 Hallar las derivadas parciales

a) Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz$ con respecto a z, se consideran x y y constantes y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial z}[xy + yz^2 + xz] = 2yz + x.$$

b) Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = z \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)$ con respecto a z, se consideran x y y constantes. Entonces, usando la regla del producto, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}[z \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)] &= (z)\frac{\partial}{\partial z}[\operatorname{sen}(xy^2 + 2z)] + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)\frac{\partial}{\partial z}[z]\\ &= (z)[\cos(xy^2 + 2z)](2) + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)\\ &= 2z\cos(xy^2 + 2z) + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z).\end{aligned}$$

c) Para calcular la derivada parcial de $f(x, y, z, w) = (x + y + z)/w$ con respecto a w, se consideran x, y y z constantes y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{x + y + z}{w}\right] = -\frac{x + y + z}{w^2}.$$

Derivadas parciales de orden superior

Como sucede con las derivadas ordinarias, es posible hallar las segundas, terceras, etc., derivadas parciales de una función de varias variables, siempre que tales derivadas existan. Las derivadas de orden superior se denotan por el orden al que se hace la derivación. Por ejemplo, la función $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

1. Derivar dos veces con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}.$$

2. Derivar dos veces con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

3. Derivar primero con respecto a x y luego con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}.$$

4. Derivar primero con respecto a y y luego con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}.$$

Los casos tercero y cuarto se llaman **derivadas parciales mixtas (cruzadas)**.

NOTA Observar que los dos tipos de notación para las derivadas parciales mixtas tienen convenciones diferentes para indicar el orden de derivación.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$ Orden de derecha a izquierda.

$$(f_x)_y = f_{xy}$$ Orden de izquierda a derecha.

Se puede recordar el orden de ambas notaciones observando que primero se deriva con respecto a la variable más "cercana" a f.

EJEMPLO 7 Hallar derivadas parciales de segundo orden

Hallar las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$, y determinar el valor de $f_{xy}(-1, 2)$.

Solución Empezar por hallar las derivadas parciales de primer orden con respecto a x y y.

$$f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y$$

Después, se deriva cada una de éstas con respecto a x y con respecto a y.

$$f_{xx}(x, y) = 10y^2 \quad \text{y} \quad f_{yy}(x, y) = 6x + 10x^2$$
$$f_{xy}(x, y) = 6y + 20xy \quad \text{y} \quad f_{yx}(x, y) = 6y + 20xy$$

En $(-1, 2)$, el valor de f_{xy} es $f_{xy}(-1, 2) = 12 - 40 = -28$.

NOTA En el ejemplo 7 las dos derivadas parciales mixtas son iguales. En el teorema 13.3 se dan condiciones suficientes para que esto ocurra.

TEOREMA 13.3 Igualdad de las derivadas parciales mixtas

Si f es una función de x y y tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas en un disco abierto R, entonces, para todo (x, y) en R,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

El teorema 13.3 también se aplica a una función f de *tres o más variables* siempre y cuando las derivadas parciales de segundo orden sean continuas. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$ y todas sus derivadas parciales de segundo orden son continuas en una región abierta R, entonces en todo punto en R el orden de derivación para obtener las derivadas parciales mixtas de segundo orden es irrelevante. Si las derivadas parciales de tercer orden de f también son continuas, el orden de derivación para obtener las derivadas parciales mixtas de tercer orden es irrelevante.

EJEMPLO 8 Hallar derivadas parciales de orden superior

Mostrar que $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$ para la función dada por

$$f(x, y, z) = ye^x + x \ln z.$$

Solución

Derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x, y, z) = ye^x + \ln z, \qquad f_z(x, y, z) = \frac{x}{z}$$

Derivadas parciales de segundo orden (nótese que las dos primeras son iguales):

$$f_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \qquad f_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \qquad f_{zz}(x, y, z) = -\frac{x}{z^2}$$

Derivadas parciales de tercer orden (nótese que las tres son iguales):

$$f_{xzz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \qquad f_{zxz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \qquad f_{zzx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}$$

3.2. Derivadas direccionales

Sección 13.6 del libro

R. Larson, R. Hostetler, B. Edward, Cálculo II, Pirámide, 2010.

Para esta sección no se hace apunte, ya que sería una copia textual de dicho libro. Ver páginas 931 a 933.

Sección 13.6 Derivadas direccionales y gradientes

- Hallar y usar las derivadas direccionales de una función de dos variables.
- Hallar el gradiente de una función de dos variables.
- Utilizar el gradiente de una función de dos variables en aplicaciones.
- Hallar las derivadas direccionales y el gradiente de funciones de tres variables.

Derivada direccional

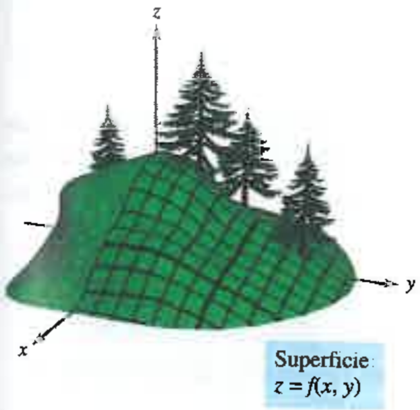


Figura 13.42

Suponer que se está en la colina de la figura 13.42 y se quiere determinar la inclinación de la colina respecto al eje z. Si la colina está representada por $z = f(x, y)$, se sabe cómo determinar la pendiente en dos direcciones diferentes: la pendiente en la dirección de y está dada por la derivada parcial $f_y(x, y)$, y la pendiente en la dirección de x está dada por la derivada parcial $f_x(x, y)$. En esta sección se verá que estas dos derivadas parciales pueden usarse para calcular la pendiente en *cualquier* dirección.

Para determinar la pendiente en un punto de una superficie, se definirá un nuevo tipo de derivada llamada **derivada direccional**. Sea $z = f(x, y)$ una *superficie* y $P(x_0, y_0)$ un *punto* en el dominio de f, como se muestra en la figura 13.43. La "dirección" de la derivada direccional está dada por un vector unitario

$$\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

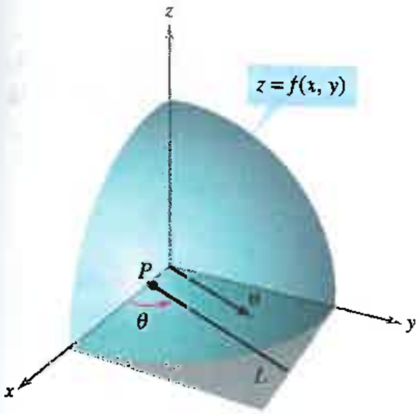


Figura 13.43

donde θ es el ángulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada, se reduce el problema a dos dimensiones cortando la superficie con un plano vertical que pasa por el punto P y es paralelo a $\mathbf{u}$, como se muestra en la figura 13.44. Este plano vertical corta la superficie formando una curva C. La pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la dirección de $\mathbf{u}$ se define como la pendiente de la curva C en ese punto.

De manera informal, se puede expresar la pendiente de la curva C como un límite análogo a los usados en el cálculo de una variable. El plano vertical utilizado para formar C corta el plano xy en una recta L, representada por las ecuaciones paramétricas,

$$x = x_0 + t\cos\theta$$

y

$$y = y_0 + t\operatorname{sen}\theta$$

de manera que para todo valor de t, el punto $Q(x, y)$ se encuentra en la recta L. Para cada uno de los puntos P y Q, hay un punto correspondiente en la superficie.

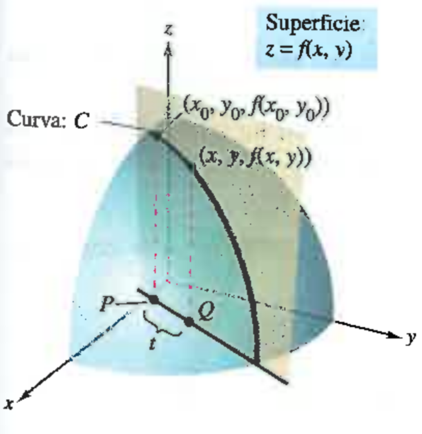


Figura 13.44

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ Punto sobre P.
$(x, y, f(x, y))$ Punto sobre Q.

Como la distancia entre P y Q es

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(t\cos\theta)^2 + (t\operatorname{sen}\theta)^2} = |t|$$

se puede escribir la pendiente de secante que pasa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y $(x, y, f(x, y))$ como

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Por último, haciendo que t se aproxime a 0, se llega a la definición siguiente.

Definición de la derivada direccional

Sea f una función de dos variables x y y, y sea $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces la **derivada direccional de f en la dirección de u**, que se denota $D_{\mathbf{u}}f$, es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\cos\theta,\, y + t\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Calcular derivadas direccionales empleando esta definición es lo mismo que encontrar la derivada de una función de una variable empleando el proceso del límite (sección 2.1). Una fórmula "de trabajo" más simple para hallar derivadas direccionales emplea las derivadas parciales f_x y f_y.

TEOREMA 13.9 Derivada direccional

Si f es una función diferenciable de x y y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

Demostración Dado un punto fijado (x_0, y_0), sea $x = x_0 + t\cos\theta$ y sea $y = y_0 + t\operatorname{sen}\theta$. Ahora, se hace $g(t) = f(x, y)$. Como f es diferenciable, se puede aplicar la regla de la cadena del teorema 13.7 para obtener

$$g'(t) = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

Si $t = 0$, entonces $x = x_0$ y $y = y_0$, por tanto

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta.$$

De acuerdo con la definición de $g'(t)$, también es verdad que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\theta,\, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta$.

Hay una cantidad infinita de derivadas direccionales en un punto dado de una superficie, una para cada dirección especificada por **u**, como se muestra en la figura 13.45. Dos de éstas son las derivadas parciales f_x y f_y.

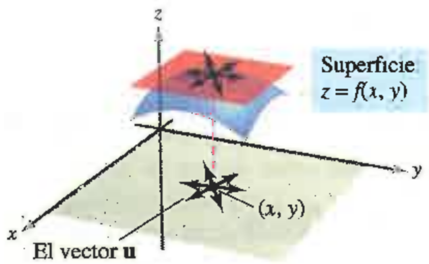


Figura 13.45

1. En la dirección del eje x positivo (o semieje positivo x) ($\theta = 0$): $\mathbf{u} = \cos 0\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 0\,\mathbf{j} = \mathbf{i}$

$$D_{\mathbf{i}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos 0 + f_y(x, y)\operatorname{sen} 0 = f_x(x, y)$$

2. En la dirección del eje y positivo (o semieje positivo y)

$(\theta = \pi/2)$: $\mathbf{u} = \cos\frac{\pi}{2}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\,\mathbf{j} = \mathbf{j}$

$$D_{\mathbf{j}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{2} + f_y(x, y)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = f_y(x, y)$$

EJEMPLO 1 Hallar una derivada direccional

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 4 - x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 \qquad \text{Superficie.}$$

en (1, 2) en la dirección de

$$\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}. \qquad \text{Dirección.}$$

Solución Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, y se puede aplicar el teorema 13.9.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta \\ &= (-2x)\cos\theta + \left(-\frac{y}{2}\right)\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Evaluando en $\theta = \pi/3$, $x = 1$ y $y = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, 2) &= (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\approx -1.866. \end{aligned} \qquad \text{Ver figura 13.46.}$$

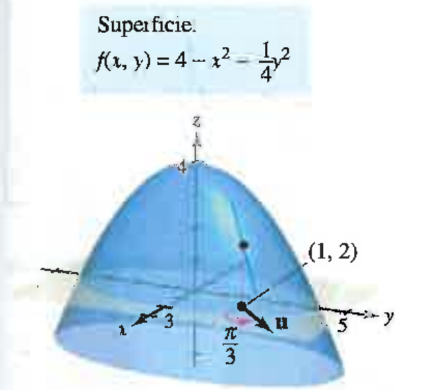


Figura 13.46

NOTA La figura 13.46 muestra que la derivada direccional se puede interpretar como la pendiente de la superficie en el punto (1, 2, 2) en la dirección del vector unitario **u**.

Se ha especificado la dirección por medio de un vector unitario **u**. Si la dirección está dada por un vector cuya longitud no es 1, se debe normalizar el vector antes de aplicar la fórmula del teorema 13.9.

EJEMPLO 2 Hallar una derivada direccional

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} 2y \qquad \text{Superficie.}$$

en $(1, \pi/2)$ en la dirección de

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}. \qquad \text{Dirección.}$$

Solución Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, y se puede aplicar el teorema 13.9. Se comienza por calcular un vector unitario en la dirección de **v**.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

Usando este vector unitario, se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= (2x\operatorname{sen}2y)(\cos\theta) + (2x^2\cos 2y)(\operatorname{sen}\theta) \\ D_{\mathbf{u}}f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) &= (2\operatorname{sen}\pi)\left(\frac{3}{5}\right) + (2\cos\pi)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= (0)\left(\frac{3}{5}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{8}{5}. \end{aligned} \qquad \text{Ver figura 13.47.}$$

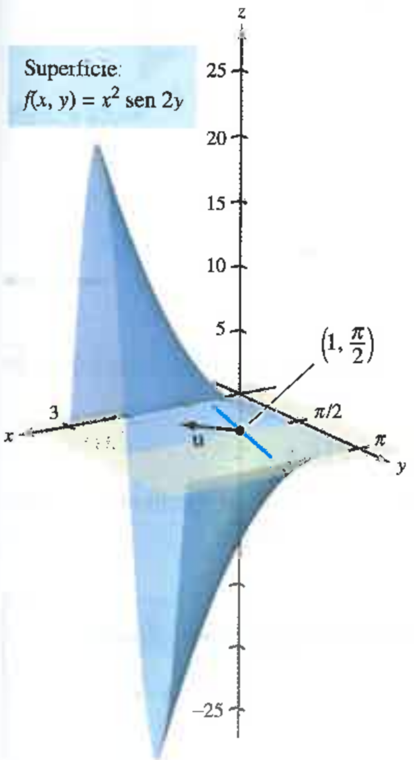


Figura 13.47

4. Integrales dobles

Sección 14.2 del libro

R. Larson, R. Hostetler, B. Edward, CÁLCULO II, Pirámide, 2010.

Para esta sección no se hace apunte, ya que sería una copia textual de dicho libro. Ver páginas 990 a 997.

Sección 14.2 Integrales dobles y volumen

- **Utilizar una integral doble para representar el volumen de una región sólida.**
- **Utilizar las propiedades de las integrales dobles.**
- **Evaluar una integral doble como una integral iterada.**

Integrales dobles y volumen de una región sólida

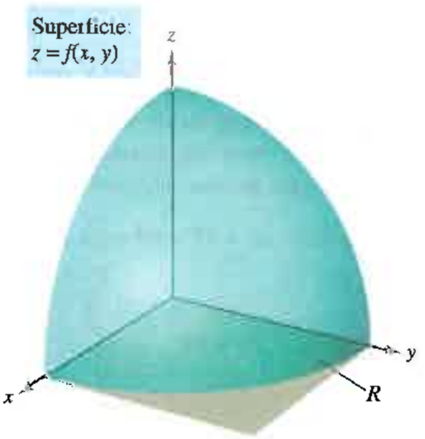


Figura 14.8

Se sabe que una integral definida sobre un *intervalo* utiliza un proceso de límite para asignar una medida a cantidades como el área, el volumen, la longitud de arco y la masa. En esta sección, se usará un proceso similar para definir la **integral doble** de una función de dos variables sobre una *región en el plano*.

Considérese una función continua f tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región R del plano xy. El objetivo es hallar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie dada por

$$z = f(x, y) \qquad \text{Superficie sobre el plano } xy.$$

y el plano xy, como se muestra en la figura 14.8. Para empezar se sobrepone una red o cuadrícula rectangular sobre la región, como se muestra en la figura 14.9. Los rectángulos que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición interior** Δ, cuya **norma** $\|\Delta\|$ está definida como la longitud de la diagonal más larga de los n rectángulos. Después, se elige un punto (x_i, y_i) en cada rectángulo y se forma el prisma rectangular cuya altura es $f(x_i, y_i)$, como se muestra en la figura 14.10. Como el área del i-ésimo rectángulo es

$$\Delta A_i \qquad \text{Área del rectángulo } i\text{-ésimo.}$$

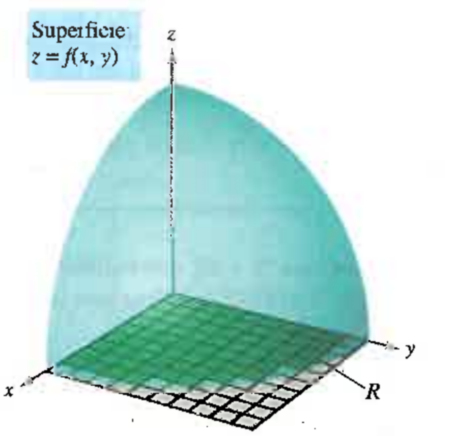
se sigue que el volumen del prisma i-ésimo es

$$f(x_i, y_i)\,\Delta A_i \qquad \text{Volumen del prisma } i\text{-ésimo.}$$

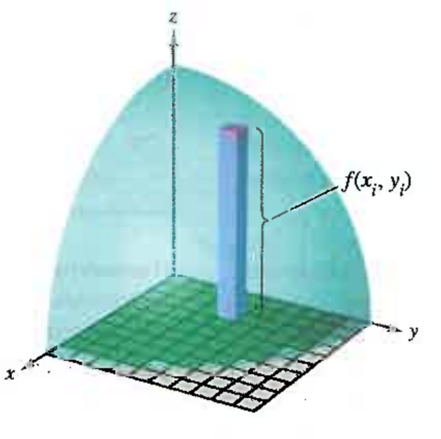
y el volumen de la región sólida se puede aproximar por la suma de Riemann de los volúmenes de todos los n prismas,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i \qquad \text{Suma de Riemann.}$$

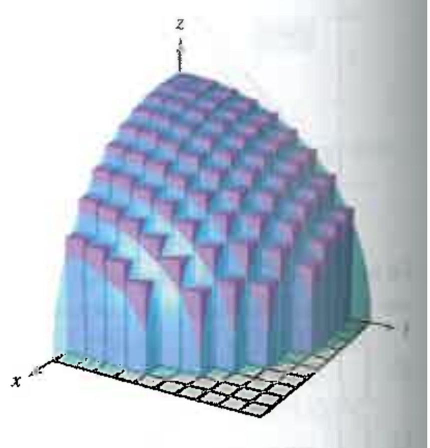
como se muestra en la figura 14.11. Esta aproximación se puede mejorar tomando redes o cuadrículas con rectángulos más y más pequeños, como se muestra en el ejemplo.



Los rectángulos que se encuentran dentro de R forman una partición interior de R
Figura 14.9



Prisma rectangular cuya base tiene un área de ΔA_i y cuya altura es $f(x_i, y_i)$
Figura 14.10



Volumen aproximado por prismas rectangulares
Figura 14.11

EJEMPLO 1 Aproximar el volumen de un sólido

Aproximar el volumen del sólido comprendido entre el paraboloide

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

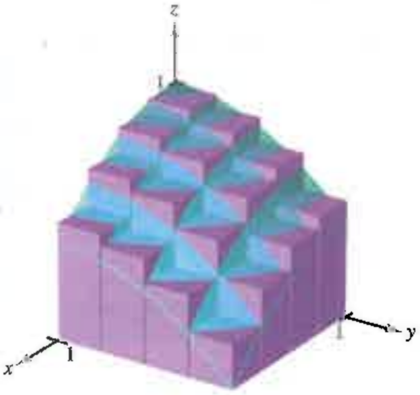
y la región cuadrada R dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Utilizar una partición formada por los cuadrados cuyos lados tengan una longitud de $\frac{1}{4}$.

Solución Para empezar se forma la partición especificada de R. En esta partición, es conveniente elegir los centros de las subregiones como los puntos en los que se evalúa $f(x, y)$.

$$\begin{array}{cccc}
\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \\
\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right) \\
\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right) \\
\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)
\end{array}$$

Como el área de cada cuadrado es $\Delta A_i = \frac{1}{16}$, el volumen se puede aproximar por la suma

$$\sum_{i=1}^{16} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{16}\left(1 - \frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}y_i^2\right)\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$\approx 0.672.$$



Superficie:
$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

Figura 14.12

Esta aproximación se muestra gráficamente en la figura 14.12. El volumen exacto del sólido es $\frac{2}{3}$ (ver el ejemplo 2). Se obtiene una mejor aproximación si se usa una partición más fina. Por ejemplo, con una partición con cuadrados con lados de longitud $\frac{1}{10}$, la aproximación es 0.668.

TECNOLOGÍA Algunas graficadoras tridimensionales pueden representar figuras como la mostrada en la figura 14.12. La gráfica mostrada en la figura 14.13 se dibujó con un programa para computadora. En esta gráfica, obsérvese que cada uno de los prismas rectangulares está dentro de la región sólida.

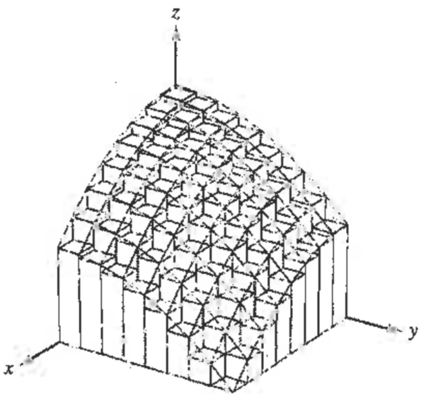


Figura 14.13

En el ejemplo 1, hay que observar que usando particiones más finas, se obtienen mejores aproximaciones al volumen. Esta observación sugiere que se podría obtener el volumen exacto tomando un límite. Es decir,

$$\text{Volumen} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i.$$

El significado exacto de este límite es que el límite es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i \right| < \varepsilon$$

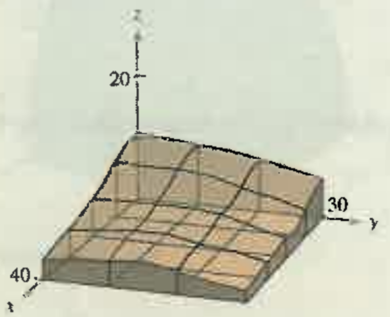
para toda partición Δ de la región plana R (que satisfaga $\|\Delta\| < \delta$) y para toda elección posible de x_i y y_i en la región i-ésima.

El uso del límite de una suma de Riemann para definir un volumen es un caso especial del uso del límite para definir una **integral doble**. Sin embargo, el caso general no requiere que la función sea positiva o continua.

EXPLORACIÓN

Las cantidades en la tabla representan la profundidad (en unidades de 10 yardas) de la tierra en el centro de cada cuadrado de la figura.

x \ y	1	2	3
1	10	9	7
2	7	7	4
3	5	5	4
4	4	5	3



Aproximar el número de yardas cúbicas de tierra en el primer octante. (Esta exploración la sugirió Robert Vojack, Ridgewood High School, Ridgewood, NJ.)

Definición de integral doble

Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy, entonces la **integral doble de f sobre R** está dada por

$$\int\!\!\int_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i$$

siempre que el límite exista. Si existe el límite, entonces f es **integrable** sobre R.

NOTA Una vez definidas las integrales dobles, se verá que una integral definida ocasionalmente se le llama **integral simple**.

Para que la integral doble de f en la región R exista es suficiente que R pueda expresarse como la unión de un número finito de subregiones que no se sobrepongan (ver figura 14.14) y que sean vertical u horizontalmente simples, y que f sea continua en la región R.

Una integral doble se puede usar para hallar el volumen de una región sólida que se encuentra entre el plano xy y la superficie dada por $z = f(x, y)$.

Volumen de una región sólida

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en R, entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre R y bajo la gráfica de f se define como

$$V = \int\!\!\int_R f(x, y)\, dA.$$

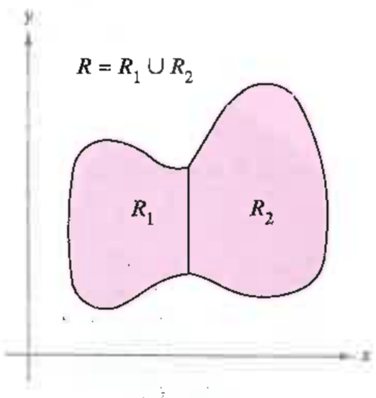
Propiedades de las integrales dobles

Las integrales dobles tienen muchas de las propiedades de las integrales simples.

TEOREMA 14.1 Propiedades de las integrales dobles

Sean f y g continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y sea c una constante.

1. $\displaystyle\int\!\!\int_R cf(x, y)\, dA = c\int\!\!\int_R f(x, y)\, dA$
2. $\displaystyle\int\!\!\int_R [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \int\!\!\int_R f(x, y)\, dA \pm \int\!\!\int_R g(x, y)\, dA$
3. $\displaystyle\int\!\!\int_R f(x, y)\, dA \geq 0, \qquad \text{si } f(x, y) \geq 0$
4. $\displaystyle\int\!\!\int_R f(x, y)\, dA \geq \int\!\!\int_R g(x, y)\, dA, \qquad \text{si } f(x, y) \geq g(x, y)$
5. $\displaystyle\int\!\!\int_R f(x, y)\, dA = \int\!\!\int_{R_1} f(x, y)\, dA + \int\!\!\int_{R_2} f(x, y)\, dA$, donde R es la unión de dos subregiones R_1 y R_2 que no se sobreponen.



Dos regiones no se sobreponen si su intersección es un conjunto de área 0. En esta figura, el área del segmento de la recta común a R_1 y R_2 es 0

Figura 14.14

Evaluación de integrales dobles

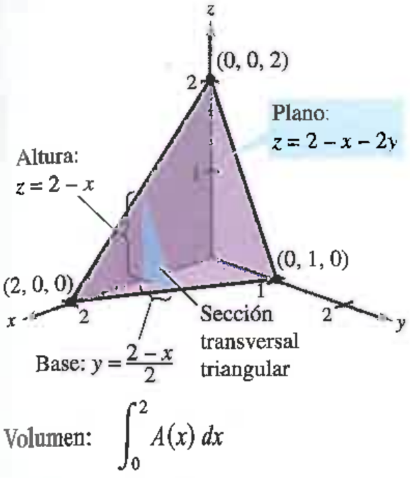


Figura 14.15

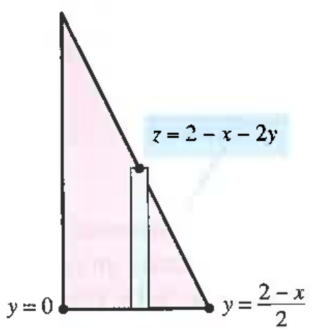
Normalmente, el primer paso para evaluar una integral doble es reescribirla como una integral iterada. Para mostrar cómo se hace esto, se utiliza el modelo geométrico de una integral doble, el volumen de un sólido.

Considérese la región sólida acotada por el plano $z = f(x, y) = 2 - x - 2y$ y por los tres planos coordenados, como se muestra en la figura 14.15. Cada sección transversal vertical paralela al plano yz es una región triangular cuya base tiene longitud $y = (2 - x)/2$ y cuya altura es $z = 2 - x$. Esto implica que para un valor fijo de x, el área de la sección transversal triangular es

$$A(x) = \frac{1}{2}\text{(base)(altura)} = \frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2}\right)(2-x) = \frac{(2-x)^2}{4}.$$

De acuerdo con la fórmula para el volumen de un sólido de secciones transversales conocidas (sección 7.2), el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= \int_a^b A(x)\,dx\\ &= \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{4}\,dx\\ &= -\frac{(2-x)^3}{12}\bigg]_0^2 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$



Sección transversal triangular
Figura 14.16

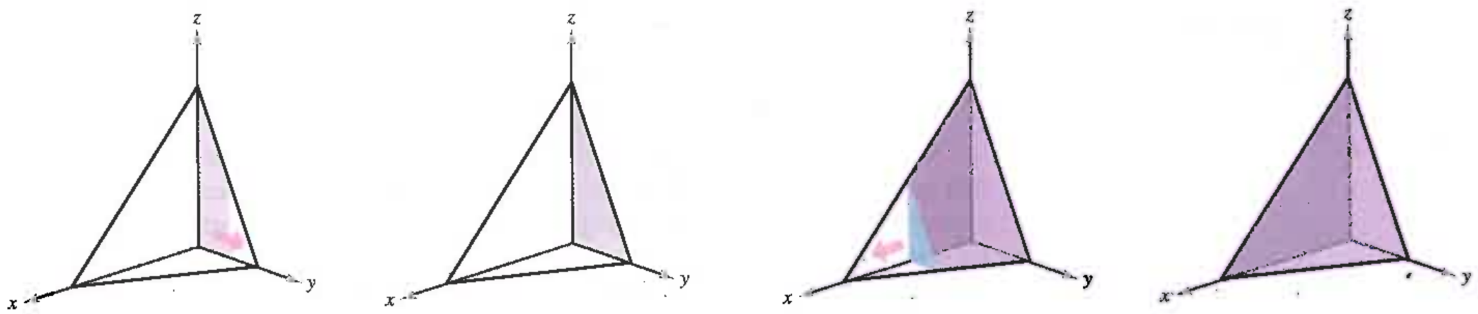
Este procedimiento funciona, sin importar cómo se obtenga $A(x)$. En particular, $A(x)$ se puede hallar por integración, como se muestra en la figura 14.16. Es decir, se considera x constante, y se integra $z = 2 - x - 2y$ desde 0 hasta $(2 - x)/2$ para obtener

$$\begin{aligned}A(x) &= \int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y)\,dy\\ &= \Big[(2-x)y - y^2\Big]_0^{(2-x)/2}\\ &= \frac{(2-x)^2}{4}.\end{aligned}$$

Combinando estos resultados, se tiene la *integral iterada*

$$\text{Volumen} = \int\!\!\int_R f(x, y)\,dA = \int_0^2\int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx.$$

Para comprender mejor este procedimiento, se puede imaginar la integración como dos barridos. En la integración interior, una recta vertical barre el área de una sección transversal. En la integración exterior, la sección transversal triangular barre el volumen, como se muestra en la figura 14.17.



Integrar con respecto a y para obtener el área de la sección transversal

Integrar con respecto a x para obtener el volumen del sólido

Figura 14.17

El teorema siguiente lo demostró el matemático italiano Guido Fubini (1879-1943). El teorema establece que si R es vertical u horizontalmente simple y f es continua en R, la integral doble de f en R es igual a una integral iterada.

TEOREMA 14.2 Teorema de Fubini

Sea f continua en una región plana R.

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

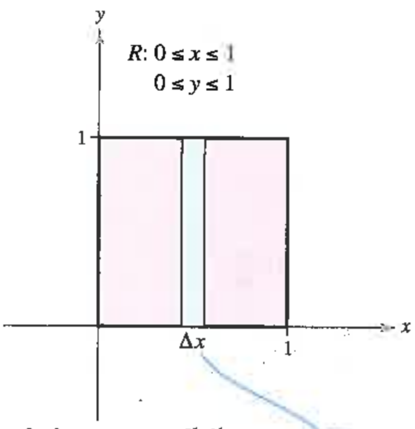
$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral doble como integral iterada

Evaluar

$$\int_R\int \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dA$$

donde R es la región dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.



$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_0^1\int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx$

El volumen de la región sólida es $\frac{2}{3}$

Figura 14.18

Solución Como la región R es un cuadrado, es vertical y horizontalmente simple y se puede emplear cualquier orden de integración. Se elige $dy\,dx$ colocando un rectángulo representativo vertical en la región, como se muestra en la figura 14.18. Con esto se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\int_R\int \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dA &= \int_0^1\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)y - \frac{y^3}{6}\right]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}x^2\right) dx \\
&= \left[\frac{5}{6}x - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

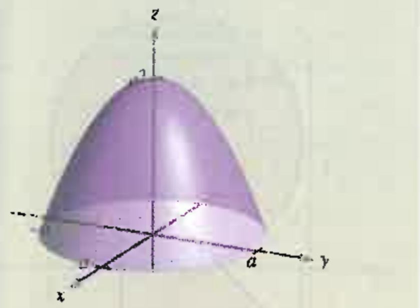
La integral doble evaluada en el ejemplo 2 representa el volumen de la región sólida que fue aproximado en el ejemplo 1. Nótese que la aproximación obtenida en el ejemplo 1 es buena $\left(0.672 \text{ contra } \frac{2}{3}\right)$ aun cuando se empleó una partición que constaba sólo en 16 cuadrados. El error se debe a que se usaron los centros de las subregiones cuadradas como los puntos para la aproximación. Esto es comparable a la aproximación de una integral simple con la regla del punto medio.

EXPLORACIÓN

El volumen de un sector de paraboloide
El sólido del ejemplo 3 tiene una base elíptica (no circular). Considerar la región limitada o acotada por el paraboloide circular

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy. ¿Cuántas maneras de hallar el volumen de este sólido se conocen ahora? Por ejemplo, se podría usar el método del disco para encontrar el volumen como un sólido de revolución. ¿Todos los métodos emplean integración?



La dificultad para evaluar una integral simple $\int_a^b f(x)\,dx$ depende normalmente de la función f, y no del intervalo $[a, b]$. Ésta es una diferencia importante entre las integrales simples y las integrales dobles. En el ejemplo siguiente se integra una función similar a la de los ejemplos 1 y 2. Nótese que una variación en la región R lleva a un problema de integración mucho más difícil.

EJEMPLO 3 Hallar el volumen por medio de una integral doble

Hallar el volumen de la región sólida acotada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy.

Solución Haciendo $z = 0$, se ve que la base de la región, en el plano xy, es la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$, como se muestra en la figura 14.19*a*. Esta región plana es vertical y horizontalmente simple, por tanto el orden $dy\,dx$ es apropiado.

Límites o cotas variables para y: $-\sqrt{\dfrac{(4 - x^2)}{2}} \le y \le \sqrt{\dfrac{(4 - x^2)}{2}}$

Límites o cotas constantes para x: $-2 \le x \le 2$

El volumen está dado por

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (4 - x^2 - 2y^2)\,dy\,dx \qquad \text{Ver figura 14.19}b.$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[(4 - x^2)y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)^{3/2}\,dx$$

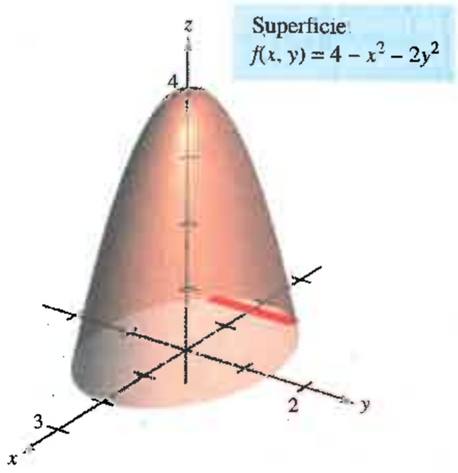
$$= \frac{4}{3\sqrt{2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16\cos^4\theta\,d\theta \qquad x = 2\,\text{sen}\,\theta.$$

$$= \frac{64}{3\sqrt{2}}(2)\int_{0}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$$

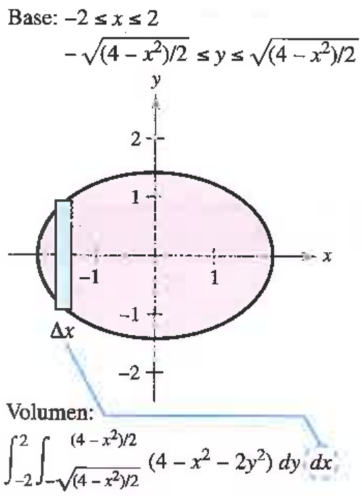
$$= \frac{128}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3\pi}{16}\right) \qquad \text{Fórmula de Wallis.}$$

$$= 4\sqrt{2}\pi.$$

NOTA En el ejemplo 3, observar la utilidad de la fórmula de Wallis para evaluar $\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\,d\theta$. Esta fórmula se puede consultar en la sección 8.3.



a)

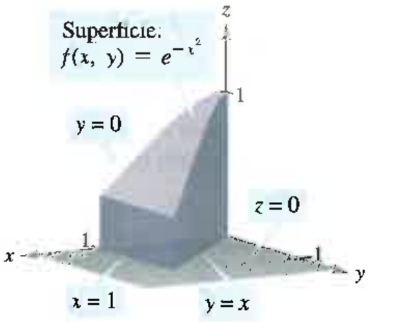


b)

Figura 14.19

En los ejemplos 2 y 3, los problemas se podrían haber resuelto empleando cualquiera de los órdenes de integración porque las regiones eran vertical y horizontalmente simples. En caso de haber usado el orden $dx\,dy$ se habrían obtenido integrales con dificultad muy parecida. Sin embargo, hay algunas ocasiones en las que uno de los órdenes de integración es mucho más conveniente que otro. El ejemplo 4 muestra uno de estos casos.

EJEMPLO 4 Comparación de diferentes órdenes de integración



La base está acotada por $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$
Figura 14.20

Hallar el volumen de la región sólida R acotada por la superficie

$$f(x, y) = e^{-x^2} \qquad \text{Superficie.}$$

y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 14.20.

Solución La base de R en el plano xy está acotada por las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $y = x$. Los dos posibles órdenes de integración se muestran en la figura 14.21.

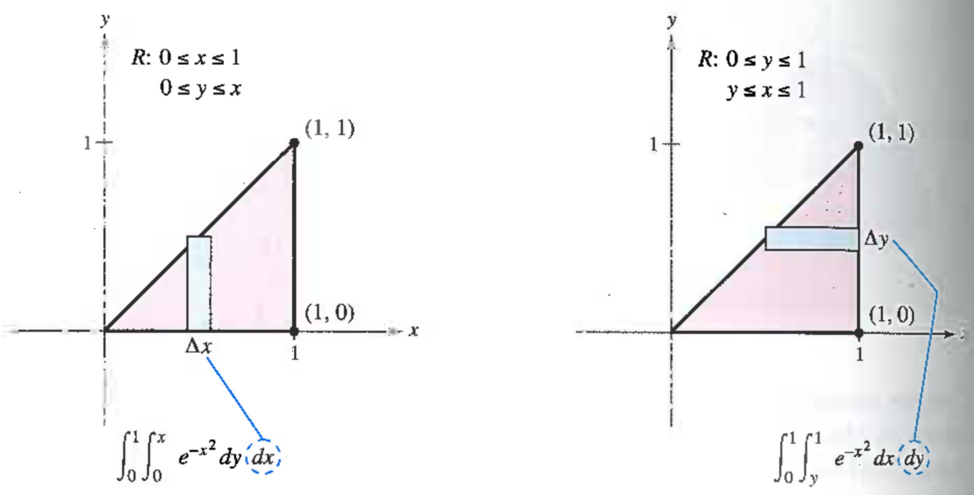
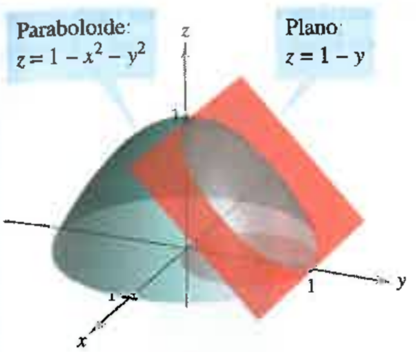


Figura 14.21

Estableciendo las integrales iteradas correspondientes, se ve que el orden $dx\,dy$ requiere la primitiva (o antiderivada) $\int e^{-x^2}\,dx$, la cual no es una función elemental. Por otro lado con el orden $dy\,dx$ se obtiene la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x e^{-x^2}\,dy\,dx &= \int_0^1 e^{-x^2} y \Big]_0^x dx \\
&= \int_0^1 x e^{-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right) \\
&= \frac{e-1}{2e} \\
&\approx 0.316.
\end{aligned}$$

NOTA Tratar de utilizar un integrador simbólico para evaluar la integral del ejemplo 4.



R: $0 \le y \le 1$
$-\sqrt{y-y^2} \le x \le \sqrt{y-y^2}$

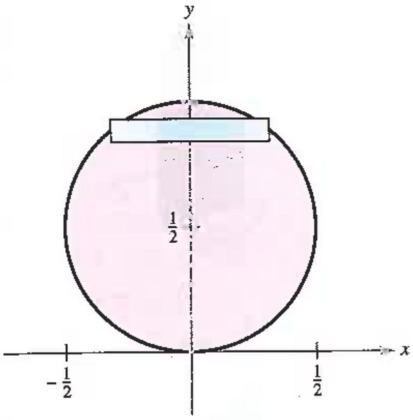


Figura 14.22

EJEMPLO 5 Volumen de una región acotada por dos superficies

Hallar el volumen de la región sólida R acotada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$, como se muestra en la figura 14.22.

Solución Igualando los valores z, se determina que la intersección de las dos superficies se produce en el cilindro circular recto dado por

$$1 - y = 1 - x^2 - y^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = y - y^2.$$

Como el volumen de R es la diferencia entre el volumen bajo el paraboloide y el volumen bajo el plano, se tiene

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy - \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y - y^2 - x^2)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \left[(y - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dy \\
&= \frac{4}{3} \int_0^1 (y - y^2)^{3/2}\, dy \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right) \int_0^1 [1 - (2y - 1)^2]^{3/2}\, dy \\
&= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4 \theta}{2}\, d\theta && 2y - 1 = \operatorname{sen} \theta. \\
&= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^4 d\theta \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{32}. && \text{Fórmula de Wallis.}
\end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 14.2

Aproximación **En los ejercicios 1 a 4, aproximar la integral $\int_R \int f(x, y)\, dA$ dividiendo el rectángulo R con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 2) y (0, 2) en ocho cuadrados iguales y hallando la suma**

$$\sum_{i=1}^{8} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i$$

donde (x_i, y_i) es el centro del cuadrado i-ésimo. Evaluar la integral iterada y compararla con la aproximación.

1. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^2 (x + y)\, dy\, dx$

2. $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^4 \int_0^2 x^2 y\, dy\, dx$

3. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^2 (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^2 \frac{1}{(x + 1)(y + 1)}\, dy\, dx$

5. ***Aproximación*** La tabla muestra valores de una función f sobre una región cuadrada R. Dividir la región en 16 cuadrados iguales y elegir (x_i, y_i) como el punto más cercano al origen en el cuadrado i-ésimo. Comparar esta aproximación con la obtenida usando el punto más lejano al origen en el cuadrado i-ésimo.

$$\int_0^4 \int_0^4 f(x, y)\, dy\, dx$$

x \ y	0	1	2	3	4
0	32	31	28	23	16
1	31	30	27	22	15
2	28	27	24	19	12
3	23	22	19	14	7
4	16	15	12	7	0

5. Números complejos

5.1. Definiciones

Números naturales ($\mathbb{N}$): $1, 2, 3, \ldots$
$2 + x = 1$ no tiene solución en $\mathbb{N}$.

Números enteros ($\mathbb{Z}$): $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
$2x - 3 = -2$ no tiene solución en $\mathbb{Z}$.

Números racionales ($\mathbb{Q}$): p/q, con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.
$x^2 - 2 = 1$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$.

Números reales ($\mathbb{R}$): $\sqrt{3}, e, \pi \in \mathbb{R}$ pero $\notin \mathbb{Q}$.
$x^2 + 4 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.

Números complejos ($\mathbb{C}$): Definimos el número $i = \sqrt{-1}$

Definición 5.1 (Número complejo)**.** Un número complejo es una expresión $a + bi$ donde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.
Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, la parte *real* de z, es $Re(z) = a$, y la parte *imaginaria* es $Im(z) = b$.

Definición 5.2 (Igualdad en $\mathbb{C}$)**.** Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

Ejemplos.

- $3 + 4i$
- $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$
- $6i$
- -7

Las soluciones de $x^2 + 4 = 0$ son $2i$ y $-2i$ (Ejercicio: verificarlo).

Definición 5.3 (Operaciones aritméticas)**.** Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$.

- Suma $z + w = (a + c) + (b + d)i$
- Resta $z - w = (a - c) + (b - d)i$
- Producto $z.w = (a + bi)(c + di) = \underbrace{\ldots}_{\text{ejercicio}} = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- División... necesitamos definir algo más antes.

Ejemplos.

- $(3 + 5i) + (4 - 2i) = 7 + 3i$
- $(3 + 5i)(4 - 2i) = (12 + 10) + (-6 + 20)i = 22 + 14i$
- $i^{23} = i^{20+3} = (i^2)^{10}.i^2.i = -i$

Definición 5.4 (Complejo conjugado)**.** Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Se define el *complejo conjugado* de z como $\bar{z} = a - bi$.

Observación. $z.\bar{z}$ es siempre un número real.

$$z.\bar{z} = \underbrace{\ldots}_{\text{ejercicio}} = a^2 + b^2$$

Definición 5.5 (División)**.** Se multiplica y divide por el conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right)$$

Ejemplos.

- $\dfrac{3+5i}{1-2i} = \left(\dfrac{3+5i}{1-2i}\right)\left(\dfrac{1+2i}{1+2i}\right) = \dfrac{(3+5i)(1+2i)}{1+2^2} = \dfrac{(3-10)+(6+5)i}{5} = -\dfrac{7}{5}+\dfrac{11}{5}i$
- $\dfrac{7+3i}{4i} = \left(\dfrac{7+3i}{4i}\right)\left(\dfrac{-4i}{-4i}\right) = \dfrac{(7+3i)(-4i)}{16} = \dfrac{12-28i}{16} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{7}{4}i$

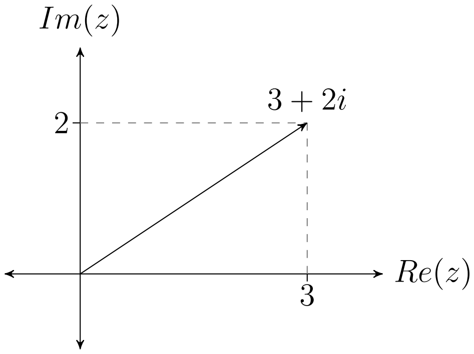
Observación. $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ¡sólo si a y b son positivos! En otro caso aparece i.
Ejemplo:

$$\sqrt{-2}\sqrt{-3} = -\sqrt{6} \neq \sqrt{6} = \sqrt{(-2)(-3)}$$

Ejercicio: Calcular $(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4})$

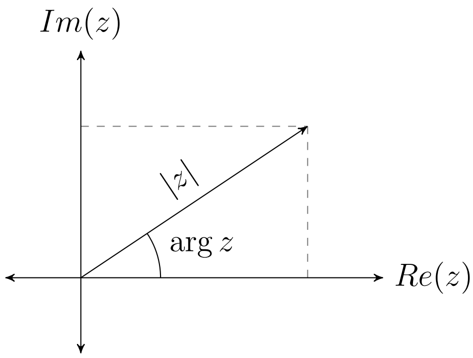
5.2. Representación gráfica

A los números reales se los presenta en una recta (numérica). A los números complejos se los representa en un plano:



Definición 5.6 (Modulo y argumento)**.** El módulo de un número complejo $z = a + bi$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el argumento es un ángulo tal que:

- $0 \leq \arg z \leq 2\pi$
- $\cos(\arg z) = \dfrac{a}{|z|}$
- $\text{sen}(\arg z)\dfrac{b}{|z|}$



Propiedades.

1. $|z.w| = |z||w|$
2. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
3. $|z^n| = |z|^n, \ \forall n \in \mathbb{Z}$

Ejercicios.

1. Graficar y calcular el módulo de

   a) $3i$

   b) $5 + 2i$

   c) $\dfrac{3+4i}{5}$

2. Graficar

   a) z

   b) $z.z$

   c) $-z$

   d) $\bar{z}$

   con $z = 2 - 3i$ y con $z = -5 + 6i$.

3. Graficar (en el mismo gráfico) z_1, z_2 y $z_1 + z_2$ con

   a) $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 2 + i$

   b) $z_1 = -1 + i$ y $z_2 = 2 - 3i$

4. Graficar

   a) $\{z \mid |z| = 2\}$

   b) $\{z = a + bi \mid a \leq 0 \wedge b \geq 1\}$

   c) $\{z \mid 0 \leq \arg z \leq \frac{2}{3}\pi \wedge |z| = 5\}$

5.3. Forma trigonométrica (o polar)

Definición 5.7. Un número complejo se puede escribir en *forma binómica*, $z = a + bi$ o en *forma trigonométrica*, $(|z|, \alpha)$, es decir, sólo con dar su módulo y argumento es suficiente. Si quisiéramos pasar de forma trigonométrica a la forma binómica, podemos usar $z = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, con $\alpha = \arg z$.
Veamos: Si $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Por lo tanto,

$$z = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = a + ib$$

En general, vamos a abusar notación y decir que $|z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ es la forma polar o trigonométrica de z.

Definición 5.8 (Igualdad)**.** Sean $z = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ y $w = |w|(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$z = w \Leftrightarrow |z| = |w| \wedge \alpha = \beta + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo. $2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$

Definición 5.9 (Operaciones)**.**

- $z.w = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta))$
- Si $w \neq 0$, $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha-\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta))$
- $\bar{z} = |z|(\cos(-\alpha) + i\,\mathrm{sen}(-\alpha))$
- $z^{-1} = |z|^{-1}(\cos(-\alpha) + i\,\mathrm{sen}(-\alpha))$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha))$

El argumento se debe poner siempre entre 0 y 2π.

Método para calcular el argumento de $z = a + bi$

- Si $z = 0$, el argumento de z es indeterminado.
- Si $a = 0$,
  - Si $b > 0$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$
  - Si $b < 0$, $\arg z = \frac{3}{2}\pi$
- Si $b = 0$,
  - Si $a > 0$, $\arg z = 0$
  - Si $a < 0$, $\arg z = \pi$
- Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, Sea $\alpha = \arccos \frac{a}{|z|}$
  - Si $b > 0$, $\arg z = \alpha$
  - Si $b < 0$, $\arg z = 2\pi - \alpha$

5.4. Raíces

Definición 5.10 (Raíz)**.** Si $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, una *raíz n-ésima* de w es un $z \in \mathbb{C}$, tal que

$$z^n = w$$

Propiedad. Si z es raíz n-ésima de w, entonces

$$z = |w|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right)$$

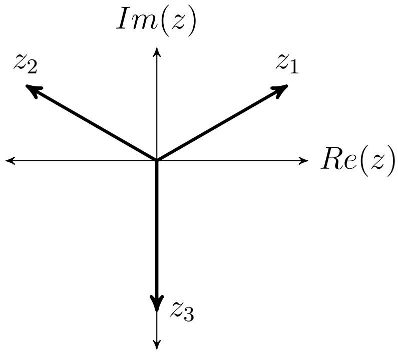
para $k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq k \leq n-1$.

Ejemplo. Calcular todos los $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = w$, con $w = 8i$.
Solución: $|w| = 8$, $\arg w = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto

$$z = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$$

para $0 \leq k \leq 2$.
Entonces:

- $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6})$
- $z_2 = 2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{6}\pi)$
- $z_3 = 2(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{2}\pi)$



5.5. Forma exponencial

La fórmula de Euler dice que $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$, por lo tanto, vamos a utilizar esta fórmula para pasar de la forma trigonométrica a la *forma exponencial*:

Definición 5.11. Si $z = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, la notación exponencial es $z = |z|e^{i\alpha}$.

Propiedades. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

- $\overline{e^{i\alpha}} = e^{\overline{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$
- $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

Ejercicios.

1. Expresar z_1, z_2, z_3 y w del ejercicio anterior en forma exponencial.
2. Verificar que $z_i^3 = w$, para $i = 1, 2, 3$, usando la forma exponencial.

6. Polinomios

6.1. Primeras definiciones

Definición 6.1. Un *polinomio con coeficientes en* $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

con $n \in \mathbb{N}_0$ y para todo $j = 0, \ldots, n$, $a_j \in \mathbb{K}$.
Al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ lo notamos $\mathbb{K}[x]$.
Al polinomio $P(x) = 0$ lo llamamos *polinomio nulo*.

Observación. En esta materia consideraremos que $\mathbb{K}$ sólo puede ser uno de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ejemplos.

$P_1(x) = 2x^2 + 6$		$P_1 \in \mathbb{Z}[x]$,	$P_1 \in \mathbb{R}[x]$
$P_2(x) = 6x^3 + \dfrac{7}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}$	$P_2 \in \mathbb{R}[x]$,	$P_2 \in \mathbb{Q}[x]$,	$P_2 \notin \mathbb{Z}[x]$
$P_3(x) = 7x^5 + 6x^4 + \sqrt{3}x$	$P_3 \notin \mathbb{Q}[x]$,	$P_3 \notin \mathbb{R}[x]$,	$P_3 \notin \mathbb{C}[x]$
$P_4(x) = 0$			P_4 está en todos

En general, $\mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$, porque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definición 6.2. Si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 x^0$, con $a_n \neq 0$, se define el grado de P como $\mathsf{gr}(P) = n$.

Observación. El polinomio nulo no tiene grado.

Definición 6.3 (Operaciones entre polinomios)**.** Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0$ y $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 x^0$, con $n, m \geq 0$. Entonces

- $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$
- $(PQ)(x) = P(x)Q(x)$

Ejemplo. Sean $P(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ y $Q(x) = 3x^4 + x^2 + x$. Entonces,

1. $(P+Q)(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1 + 3x^4 + x^2 + x = 3x^4 + 2x^3 + 2x - 1$.
2. $$\begin{aligned}(PQ)(x) &= (2x^3 - x^2 + x - 1)(3x^4 + x^2 + x)\\ &= 2x^3(3x^4 + x^2 + x) - x^2(3x^4 + x^2 + x) + x(3x^4 + x^2 + x) - (3x^4 + x^2 + x)\\ &= 6x^7 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^6 - x^4 - x^3 + 3x^5 + x^3 + x^2 - 3x^4 - x^2 - x\\ &= 6x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 2x^4 - x\end{aligned}$$

Propiedades. Si $P \neq 0$ y $Q \neq 0$,

$$\begin{aligned}\mathsf{gr}(P.Q) &= \mathsf{gr}(P) + \mathsf{gr}(Q) & &\\ \mathsf{gr}(P+Q) &\leq \text{máx}(\mathsf{gr}(P), \mathsf{gr}(Q)) & &\text{si } P+Q \neq 0\end{aligned}$$

6.2. Raíces

Un polinomio es una función, por lo cual, podemos calcular $P(c)$ para un número c. Por ejemplo, si $P(x) = 6x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{2}$, entonces $P(1) = 6(1)^3 + \frac{7}{2}(1)^2 + \frac{5}{2} = 6 + \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 12$.

Definición 6.4. Llamamos *raíz* (o *cero*) de un polinomio P al número z tal que $P(z) = 0$.

Ejemplos.

- 2 es raíz del polinomio $P(x) = 2x^2 + x - 10$ porque $P(2) = 0$.
- $-\frac{5}{2}$ también es raíz del polinomio anterior, porque $P(-\frac{5}{2}) = 0$.
- i y $-i$ son raíces de $P(x) = 2x^2 + 2$, ya que $P(i) = P(-i) = 0$.

Método para hallar las raíces: Factorizando el polinomio se pueden calcular las raíces muy fácilmente. Por ejemplo, $P(x) = x^2 + x - 6$ puede factorizarse como

$$P(x) = (x-2)(x+3)$$

con lo cual podemos concluir fácilmente que 2 y -3 son raíces de P.
Si el polinomio tiene grado 2, podemos hallar sus raíces fácilmente utilizando el siguiente teorema:

Teorema 6.1. Sea $P(x) = ax^2 + by + c$, entonces las raíces de P son

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad\qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observación. A la ecuación $r_i = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, con $i = 1, 2$, se le llama *resolvente*.

Ejemplos.

1. Sea $P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(x) &= -2x^4 - x^3 + 3x^2 \\ &= -x^2(2x^2 + x - 3) && \text{Factorizar} \\ &= -x^2(2x + 3)(x - 1) && \text{Factor cuadrático} \end{aligned}$$

   Entonces las raíces son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$.

2. Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \\ &= x^2(x - 2) - 4(x - 2) && \text{Agrupar y factorizar} \\ &= (x^2 - 4)(x - 2) && \text{Factorizar } x - 2 \\ &= (x + 2)(x - 2)(x - 2) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (x + 2)(x - 2)^2 && \text{Simplificar} \end{aligned}$$

   Entonces las raíces son $x = -2$ y $x = 2$.

6.3. División de polinomios

Para hallar las raíces, necesitamos factorizar los polinomios, y para eso, necesitamos saber cómo dividir polinomios.

La división de polinomios es muy semejante a la división de números. Cuando dividimos 38 por 7, el cociente es 5 y el residuo es 3, entonces escribimos:

$$\text{Divisor} \longrightarrow \frac{\overset{\substack{\text{Dividendo}\\ \downarrow}}{38}}{7} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Cociente}}}{5} + \frac{\overset{\substack{\text{Resto}\\ \downarrow}}{3}}{7}$$

Teorema 6.2. Si $P(x)$ y $D(x)$ son dos polinomios con $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$, donde $\mathsf{gr}(R) \leq \mathsf{gr}(D)$, tales que

$$\underset{\substack{\nearrow\\ \text{Dividendo}}}{P(x)} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Divisor}}}{D(x)} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Cociente}}}{Q(x)} + \underset{\substack{\nwarrow\\ \text{Resto}}}{R(x)}$$

Ejemplo (Algoritmo de la división). Dividir $6x^2 - 26x + 12$ por $x - 4$.
El dividendo es $6x^2 - 26x + 12$ y el divisor $x - 4$. Empezamos por acomodarlos como sigue:

$$x - 4 \,\overline{)\, 6x^2 - 26x + 12}$$

Dividimos el término principal del dividendo por el término principal de la división para obtener el primer término del cociente: ${}^{6x^2}/_{x} = 6x$. Luego multiplicamos el divisor por $6x$ y restamos el resultado al dividendo.

$$\begin{array}{rll} & 6x & \text{Dividir términos principales } \dfrac{6x^2}{x} = 6x \\ x - 4 \,) & \overline{6x^2 - 26x + 12} & \\ & \underline{6x^2 - 24x} & \text{Multiplicar } 6x(x-4) = 6x^2 - 24x \\ & -2x + 12 & \text{Restar y bajar el } 12 \end{array}$$

Repetimos el proceso usando el último renglón $-2x + 12$ como dividendo.

$$\begin{array}{rll} & 6x - 2 & \text{Dividir términos principales } \dfrac{-2x}{x} = -2 \\ x - 4 \,) & \overline{6x^2 - 26x + 12} & \\ & \underline{6x^2 - 24x} & \\ & -\ 2x + 12 & \\ & \underline{-\ 2x + \ 8} & \text{Multiplicar } -2(x-4) = -2x + 8 \\ & 4 & \text{Restar} \end{array}$$

El proceso termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor.
El último renglón contiene el resto y el primer renglón el cociente. Es decir:

$$\frac{6x^2 - 26x + 12}{x - 4} = 6x - 2 + \frac{4}{x - 4}$$

Ejercicio. $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$.
(Rta: $Q(x) = 4x^2 + 2x$ y $R(x) = -7x + 1$).

Teorema 6.3. Si un polinomio $P(x)$ se divide por $x - c$, entonces el resto es $P(c)$.

Demostración: Dividiendo $P(x)$ por $x - c$ obtenemos un cociente $Q(x)$ y resto r. Entonces,

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Evaluando P en c, $P(c) = (c - c) \cdot Q(c) + r = 0 + r = r$. Es decir, $P(c) = r$. $\square$

Ejercicio. Dividir $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$ por $x + 2$ y usar el Teorema 6.3 para hallar $P(-2)$.

Teorema 6.4. c es raíz de P si y sólo si $x - c$ es un factor de $P(x)$.

Demostración: Si $P(x)$ se factoriza como $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, entonces

$$P(c) = (c - c) \cdot Q(c) = 0 \cdot Q(c) = 0$$

Inversamente, si $P(c) = 0$, entonces por el Teorema 6.3,

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + 0 = (x - c) \cdot Q(x)$$

de modo que $x - c$ es un factor de $P(x)$. □

Ejemplo. Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Mostrar que $P(1) = 0$ y factorizar $P(x)$ completamente. $P(1) = 1^3 - 7 + 6 = 0$. Por el teorema 6.4, $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Usando el algoritmo de la división, vemos que

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 7x + 6 && \text{Polinomio dado} \\ &= (x-1)(x^2 + x - 6) && \text{Usando algoritmo de la división} \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) && \text{Factorizando la cuadrática} \end{aligned}$$

Ejercicio. Encontrar el polinomio de grado 4 con raíces -3, 0, 1 y 5.

6.4. Raíces racionales de polinomios

Considerar

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x-3)(x+4) \\ &= x^3 - x^2 - 14x + 24 \end{aligned}$$

Como vemos, el 24 se obtuvo de multiplicar $(-2) \times (-3) \times 4$. Esto significa que las raíces del polinomio son todas ellas factores del término constante. El siguiente teorema generaliza esta observación.

Teorema 6.5. Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, entonces toda raíz racional de P es de la forma

$$\frac{p}{q}$$

donde p es un factor del coeficiente constante a_0 y q es un factor del coeficiente principal a_n.

Observación. El Teorema 6.5 nos dice que si el coeficiente principal es 1 o -1, entonces las raíces racionales son factores del término constante.

Ejemplo. Encontrar las raíces racionales de $P(x) = x^3 - 3x + 2$.
Como el coeficiente principal es 1, cualquier raíz racional debe ser un divisor de 2. Entonces las raíces posibles son ± 1 y ± 2. Probamos cada una de las posibilidades:

$$P(1) = 0 \qquad P(-1) = 4 \qquad P(2) = 4 \qquad P(-2) = 0$$

Las raíces racionales son 1 y -2.

6.5. Raíces complejas y el teorema fundamental del álgebra

Teorema 6.6 (Teorema fundamental del álgebra)**.** Sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos. Entonces, P tiene al menos una raíz compleja.

Observación. Debido a que un real también es un número complejo, este teorema se aplica también a polinomios reales.

Teorema 6.7 (Teorema de factorización completa)**.** Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen números complejos $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$ (con $a \neq 0$) tales que

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

Demostración: Por el Teorema 6.6, P tiene al menos una raíz, llamémosle c_1. Por el Teorema 6.4,

$$P(x) = (x - c_1) \cdot Q_1(x)$$

donde $\mathsf{gr}(Q_1) = n - 1$. Aplicando el Teorema 6.6 a $Q_1(x)$ nos da la factorización

$$P(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot Q_2(x)$$

con $\mathsf{gr}(Q_2) = n - 2$ y c_2 raíz de Q_1. Continuando este proceso para n pasos obtenemos un coeficiente final $Q_n(x)$ de grado 0, que es una constante diferente de cero a la que llamamos a. Por lo tanto, P queda factorizado como

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n) \qquad \square$$

En teorema de factorización completa los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no son necesariamente diferentes. Si el factor $x - c$ aparece k veces en la factorización completa de P, diremos que c es una raíz con multiplicidad k. Por ejemplo, el polinomio

$$P(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2(x + 3)^5$$

tiene como raíces a 1 con multiplicidad 3 a 2 con multiplicidad 2 y a -2 con multiplicidad 5.

Teorema 6.8 (Teorema de las raíces)**.** Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces, siempre que una raíz con multiplicidad k se cuente k veces.

Teorema 6.9 (Teorema de los ceros conjugados)**.** Si $P \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces $\bar{z}$ también es raíz de P.

Ejercicio. Encontrar el polinomio de grado 3 a coeficientes enteros y con raíces $1/2$ y $3 - i$.

7. Polinomio de Taylor

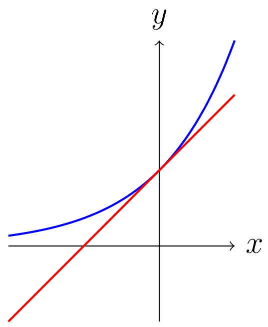
7.1. Introducción

El objetivo es aproximar una función f dada con un polinomio. Nos interesará obtener un polinomio que coincida con f y algunas de sus derivadas en un punto dado.

Ejemplo. Sea $f(x) = e^x$. En el punto $x = 0$, la función f y todas sus derivadas valen 1. El polinomio

$$g(x) = 1 + x$$

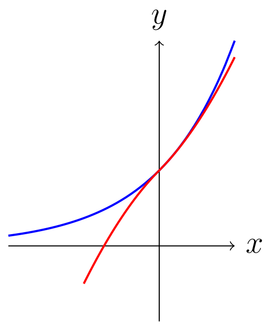
también tiene $g(0) = 1$ y $g'(0) = 1$, de manera que coincide con f y su derivada primera en 0.
Geométricamente: la gráfica de g es la recta tangente a f en el punto $(0, 1)$.



Si aproximamos f por un polinomio de segundo grado Q que coincida con f y sus dos primeras derivadas en 0, tenemos una mejor aproximación de f que con la función lineal g (al menos en las proximidades de $(0, 1)$. El polinomio

$$Q(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

tiene $Q(0) = Q'(0) = Q''(0) = 1 = f(0) = f'(0) = f''(0)$.



Es fácil comprobar que el polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

coincide con la función exponencial y sus primeras n derivadas en el punto $x = 0$.

7.2. Polinomios de Taylor engendrados por una función

Supongamos que f tiene derivadas hasta el orden n en el punto $x = 0$, con $n \geq 1$, e intentemos encontrar un polinomio P que coincida con f y sus n primeras derivadas en 0. Deben satisfacerse $n+1$ condiciones, a saber:

$$P(0) = f(0) \qquad P'(0) = f'(0) \qquad \dots P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \tag{1}$$

así que escribimos genéricamente un polinomio de grado n con $n+1$ coeficientes a determinar:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \tag{2}$$

Utilizaremos las condiciones (1) para determinar los coeficientes.

- Ponemos $x = 0$ en (2) y tenemos $P(0) = c_0$, por lo tanto, $c_0 = f(0)$.
- Derivamos ambos miembros de (2) y tomamos $x = 0$, con lo que tenemos $P'(0) = c_1$, por lo tanto $c_1 = f'(1)$.
- Derivando otra vez (2) y tomando $x = 0$ llegamos a que $P''(0) = 2c_2$, por lo que $c_2 = f''(0)/2$.
- Luego de derivar k veces, llegamos a que $P^{(k)} = k!c_k$, lo que nos da la fórmula

  $$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tag{3}$$

  para $k = 0, 1, 2, \dots, n$ (tomando que $f^{(0)}(0) = f(0)$).

Este razonamiento demuestra que si existe un polinomio de grado $\leq n$ que satisfaga (1), los coeficientes son necesariamente los dados por (3).
Reciprocamente, es fácil comprobar que el polinomio P con coeficientes dados por (3) satisface (1).
Generalizando el razonamiento anterior, podemos cambiar el punto $x = 0$, y tenemos el siguiente teorema para el caso general con $x = a$.

Teorema 7.1. Sea f una función con derivadas de orden n en el punto $x = a$. Existe un polinomio P y uno sólo de grado $\leq n$ que satisface las $n+1$ ecuaciones

$$P(a) = f(a) \qquad P'(a) = f'(a) \qquad \dots P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Tal polinomio, llamado *Polinomio de Taylor de grado n generado por f en el punto a*, viene dado por la fórmula

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Notación: Al polinomio de Taylor de grado n generado por f en el punto a lo notamos $T_n^a[f(x)]$ (si omitimos el a es porque $a = 0$).

Ejemplo. Cuando f es la función exponencial $f(x) = e^x$, tenemos $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo k, así que $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, y el polinomio de Taylor de grado n generado por f en 0 es el dado por la fórmula

$$T_n[e^x] = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Si queremos el polinomio que coincida con f y sus derivadas en el punto $a = 1$, tenemos $f^{(k)}(1) = e$ para todo k, por lo tanto

$$T_n^1[f(x)] = \sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!}(x-1)^k$$

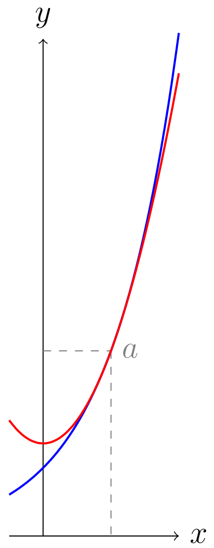


Gráfico para $n = 2$

Ejemplo. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, por lo que tenemos $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)} = \operatorname{sen} x$, etc., así que $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ y $f^{(2n)}(0) = 0$.
Por lo tanto sólo aparecen potencias impares de x en los polinomios de Taylor generados por la función seno, en 0. El polinomio de Taylor de grado $2n + 1$ tiene la forma

$$T_{2n+1}[\operatorname{sen} x] = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

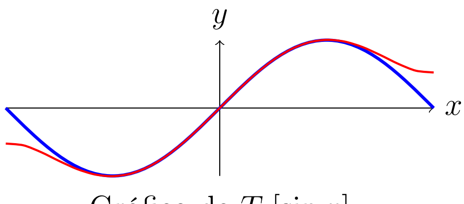


Gráfico de $T_5[\sin x]$

Ejemplo. Razonando como en el ejemplo anterior, tenemos que los polinomios de Taylor generados por la función coseno en 0 sólo contienen potencias pares de x. El polinomio de grado $2n$ viene dado por

$$T_{2n}[\cos x] = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Notar que $T_{2n}[\cos x]$ es la derivada de $T_{2n+1}[\operatorname{sen} x]$.

7.3. Cálculo de polinomios de Taylor

Algunas veces el cálculo de las derivadas $f^{(k)}(a)$ puede resultar complicado. Por eso, las siguientes propiedades nos ayudarán al cálculo.

Propiedades. El operador de Taylor T_n^a tiene las siguientes propiedades:

1. Linealidad. Si c_1 y c_2 son dos constantes,

$$T_n^a[c_1 f + c_2 g] = c_1 T_n^a[f] + c_2 T_n^a[g]$$

2. Derivación. La derivada de un polinomio de Taylor de f es un polinomio de Taylor de f'; es decir, se tiene

$$(T_n^a[f])' = T_{n-1}^a[f']$$

3. Integración. Una integral indefinida de un polinomio de Taylor de f es un polinomio de Taylor de una integral indefinida de f. Es decir,

$$\int_a^x T_n^a[f(t)]\mathrm{d}t = T_{n+1}^a\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

4. Substitución. Si $g(x) = f(cx)$, con c una constante, tenemos

$$T_n^a[g](x) = T_n^{ca}[f](cx)$$

   En particular, cuando $a = 0$, tenemos $T_n[g](x) = T_n[f](cx)$.

Ejemplos. Reemplazando x por $-x$ en el polinomio de Taylor correspondiente a e^x, obtenemos

$$T_n[e^{-x}] = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Dado que $\cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, podemos utilizar la propiedad de linealidad para obtener

$$T_{2n}[\cosh x] = \frac{1}{2}T_{2n}[e^x] + \frac{1}{2}T_{2n}[e^{-x}] = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Y derivando el anterior, podemos obtener

$$T_{2n-1}[\operatorname{senh} x] = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Teorema 7.2. Sea P_n un polinomio de grado $n \geq 1$. Sean f y g dos funciones con derivadas de orden n en 0 y supongamos que

$$f(x) = P_n(x) + x^n g(x)$$

donde $g(x) \to 0$ cuando $x \to 0$. El polinomio P_n es el polinomio de Taylor generado por f en 0.

Ejemplo. Partiendo de la identidad algebraica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{4}$$

válida para todo $x \neq 1$, vemos que $f(x) = \frac{1}{1-x}$ satisface las hipótesis del Teorema 7.2, con $P_n(x) = 1 + x + \cdots + x^n$ y $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Dado que $g(x) \to 0$ cuando $x \to 0$, el Teorema 7.2 nos dice que

$$T_n\left[\frac{1}{1-x}\right] = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

Integrando esta función, conseguimos este otro polinomio de Taylor

$$T_{n+1}[-\log(1-x)] = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Reemplazando en (4) x por $-x^2$ para conseguir

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$$

Aplicando el Teorema 7.2 una vez más, obtenemos

$$T_{2n}\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$$

e integrando éste, llegamos a

$$T_{2n+1}[\arctan x] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$